

109

N°. 75.

BULLETIN DES SCIENCES,
PAR LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE.

PARIS. Prairial, an 11 de la République.

HISTOIRE NATURELLE.
BOTANIQUE.

Extrait d'un mémoire du C. LABILLARDIÈRE, sur la force des filamens du lin de la Nouvelle Zélande, comparée à celle des filamens du chanvre, de l'aloës-pitte, du lin et de la soie.

Le lin de la Nouvelle Zélande (*phormium tenax*), que le C. Labillardière a soumis à ses expériences, fut obtenu des habitans de cette terre, par le C. Labillardière lui-même, dans le voyage à la recherche de la Peyrouse. INSTITUT NAT.

Afin d'avoir des résultats comparatifs, le C. Labillardière a eu soin de choisir les filamens des différentes substances qu'il a essayés, du même diamètre, dans toute leur longueur, autant qu'il étoit possible. C'est après avoir pris toutes les précautions nécessaires pour rendre ses expériences certaines, qu'il a fait les différens essais qu'il s'étoit proposé.

Il suit des diverses expériences du C. Labillardière, que la force des fibres de l'aloës-pitte étant égale à 7, celle du lin est représentée par $11\frac{1}{4}$; celle du chanvre, par $16\frac{1}{2}$; celle du lin de la Nouvelle Zélande, par $23\frac{1}{11}$; et celle de la soie, par 34.

La quantité dont ces fibres se distendent avant de se rompre (car on sait que la force des cordes dépend, et de la force des fibres qui les composent, et de leur élasticité) est dans une autre proportion, car étant égale à $2\frac{1}{2}$ pour l'aloës-pitte, elle n'est que de $\frac{1}{2}$ pour le lin, de 1 pour le chanvre, de $1\frac{1}{2}$ pour le lin de la Nouvelle Zélande, et de 5 pour la soie.

Les expériences du C. Labillardière, et les réflexions qui accompagnent son mémoire, démontrent évidemment que l'industrie pourroit retirer beaucoup d'avantages de la culture en grand du lin de la Nouvelle Zélande, cette culture pouvant avoir lieu avec succès dans nos départemens méridionaux. G. F. C V.

P H Y S I Q U E.

Mémoire sur le mouvement d'un corps qui tombe d'une grande hauteur, par le C. LAPLACE.

Un corps qui tombe d'une hauteur considérable s'éloigne un peu de la verticale, en vertu du mouvement de rotation de la terre; cet écart bien observé est donc propre à manifester ce mouvement. Quoique la rotation de la terre soit maintenant établie avec toute la certitude que les sciences physiques comportent, cependant une preuve directe de ce phénomène doit intéresser les géomètres et les astronomes. Ils ont fait, en conséquence, plusieurs expériences sur la chute des corps qui tombent d'une grande hauteur, et ils ont en même tems donné la théorie de ce mouvement; mais leurs résultats pré-

Soc. PHILOM.

N°. III. 7^e. Année. Tome III.

C

sentent de grandes différences. Tous conviennent que le corps doit dévier vers l'est de la verticale; plusieurs pensent qu'il doit à-la-fois dévier vers l'équateur; d'autres, enfin, prétendent que cette dernière déviation n'auroit point lieu dans le vide, mais qu'elle doit être produite par la résistance de l'air. Au milieu de ces incertitudes, j'ai cru qu'une analyse exacte de ce problème seroit utile à ceux qui voudront comparer sur ce point la théorie aux observations. C'est l'objet de ce mémoire, dans lequel je donne la véritable expression de la déviation du corps, en ayant égard à la résistance de l'air, et je fais voir que, quelle que soit cette résistance et la figure de la terre, il ne doit point y avoir de déviation vers l'équateur.

L'observatoire national offre un puits d'environ 54 mètres de profondeur, depuis la plate-forme du sommet, jusqu'au fond des caves, et qui est très-propre à ce genre d'expériences, auquel il fut primitivement destiné. En choisissant le moment où l'atmosphère est calme, et en fermant exactement l'Observatoire, on évitera l'influence du mouvement de l'air, dont on se garantiroit plus sûrement encore, et très-facilement, au moyen de quatre tambours adaptés verticalement aux quatre voûtes que le puits traverse. La déviation du corps vers l'est seroit d'environ six millimètres, suivant la théorie. Cette quantité, quoique très-petite, peut être reconnue par des expériences très-précises, et répétées plusieurs fois.

Nommons x, y, z , les trois coordonnées rectangles du corps, l'origine de ces coordonnées étant au centre de la terre, et l'axe des x étant l'axe de rotation de cette planète. Soit r le rayon mené de ce centre au sommet de la tour d'où le corps tombe; θ l'angle que r forme avec l'axe de rotation; et ω l'angle que le plan passant par r et par l'axe de la terre, forme avec le plan passant par le même axe, et par l'un des axes principaux de la terre, situés dans le plan de son équateur; enfin, soit nt le mouvement angulaire de rotation de la terre. En nommant X, Y, Z , les coordonnées du sommet de la tour, on aura

$$\begin{aligned} X &= r \cos. \theta; \\ Y &= r \sin. \theta \cos. (nt + \omega); \\ Z &= r \sin. \theta \sin. (nt + \omega); \end{aligned}$$

$nt + \omega$ étant l'angle que le plan passant par r et par l'axe de la terre, forme avec le plan des x et des y .

Supposons ensuite que, relativement au corps dans sa chute, r se change en $r - as$, θ dans $\theta + au$, et ω dans $\omega + av$; on aura

$$\begin{aligned} x &= (r - as) \cos. (\theta + au); \\ y &= (r - as) \sin. (\theta + au) \cos. (nt + \omega + av); \\ z &= (r - as) \sin. (\theta + au) \sin. (nt + \omega + av). \end{aligned}$$

Nommons V la somme de toutes les molécules du sphéroïde terrestre, divisées par leurs distances au corps attiré. Les forces dont ce corps est animé par l'attraction de ces molécules, sont parallèlement aux axes des x , des y et des z , $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ et $\left(\frac{dV}{dz}\right)$, comme il résulte du n°. 11 du second livre de ma Mécanique céleste. Pour avoir égard à la résistance de l'air, nous pouvons représenter par $\phi \left(as, \omega \frac{ds}{dt} \right)$ l'expression de cette résistance; car la vitesse du corps, relative à l'air considéré comme immobile, étant considérablement plus grande dans le sens de r , que dans le sens perpendiculaire à r , ainsi qu'on le verra bientôt, l'expression de cette vitesse relative, est à très-peu-près $\omega \frac{ds}{dt}$. Si l'on fait, pour plus de simplicité, $r = 1$, la vitesse relative du corps dans le sens de θ , est $\omega \frac{du}{dt}$, et dans le sens de ω , elle est égale à $\omega \frac{dv}{dt} \sin. \theta$; la résistance de l'air sera donc

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\alpha s, \alpha \frac{ds}{dt} \right)}{\alpha \frac{ds}{dt}} \cdot \alpha \frac{ds}{dt}, \text{ dans le sens de } r; \\ & - \frac{\left(\alpha s, \alpha \frac{ds}{dt} \right)}{\alpha \frac{ds}{dt}} \cdot \alpha \frac{du}{dt}, \text{ dans le sens des } \theta; \\ & - \frac{\left(\alpha s, \alpha \frac{ds}{dt} \right)}{\alpha \frac{ds}{dt}} \cdot \alpha \frac{dv}{dt} \sin \theta, \text{ dans le sens des } \alpha; \end{aligned}$$

Nommons K le facteur $\frac{\left(\alpha s, \alpha \frac{ds}{dt} \right)}{\alpha \frac{ds}{dt}}$; on aura, par le principe des vitesses virtuelles,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta x \frac{ddx}{dt^2} + \delta y \frac{ddy}{dt^2} + \delta z \frac{ddz}{dt^2} \\ & - \delta x \left(\frac{dV}{dx} \right) - \delta y \left(\frac{dV}{dy} \right) - \delta z \left(\frac{dV}{dz} \right) \\ & - K \delta r \cdot \alpha \frac{ds}{dt} + K \delta \theta \cdot \alpha \frac{du}{dt} + K \delta \alpha \cdot \sin^2 \theta \cdot \alpha \frac{dv}{dt}; \end{aligned}$$

la caractéristique différentielle δ se rapportant aux coordonnées r, θ et α , dont x, y, z sont fonctions. En substituant pour x, y, z , leurs valeurs précédentes, on a, en négligeant les termes de l'ordre α^2 ,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta r \left\{ -\alpha \frac{dds}{dt^2} - 2\alpha n r \frac{dv}{dt} \sin^2 \theta - \alpha K \frac{ds}{dt} \right\} \\ & + r^2 \delta \theta \left\{ \alpha \frac{ddu}{dt^2} - 2\alpha n \frac{dv}{dt} \sin \theta \cos \theta + \alpha K \frac{du}{dt} \right\} \\ & + r^2 \delta \alpha \sin \theta \left\{ \alpha \frac{ddv}{dt^2} \sin \theta + 2\alpha n \frac{du}{dt} \cos \theta - 2\alpha n \frac{ds}{dt} \frac{\sin \theta}{r} + \alpha K \frac{dv}{dt} \sin \theta \right\} \\ & - \delta V - \frac{n^2}{2} \delta \left\{ (r - \alpha s)^2 \sin^2 (\theta + \alpha u) \right\} \dots (1) \end{aligned}$$

Par la nature de l'équilibre de la couche d'air dans laquelle le corps se trouve, on a

$$0 = \delta V + \frac{n^2}{2} \delta \left\{ (r - \alpha s)^2 \sin^2 (\theta + \alpha u) \right\} \dots (2) \quad (*)$$

pourvu que la valeur de δr soit assujétie à la surface de niveau de la couche. Soit à cette surface,

$$r = a + y,$$

y étant une fonction de θ , de α et de a , a étant constant pour la même couche; l'équation (2) donne ainsi

$$0 = \left(\frac{dQ}{dr} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \cdot \delta \theta + \left(\frac{dy}{d\alpha} \right) \cdot \delta \alpha \right\} + \left(\frac{dQ}{d\theta} \right) \cdot \delta \theta + \left(\frac{dQ}{d\alpha} \right) \cdot \delta \alpha,$$

(*) Voyez la Mécanique céleste, tom. I, pag. 98. (Note du R.)

Q étant supposé égal à $V + \frac{n^2}{2} \left\{ (r - as)^2 \cdot \text{Sin.}^2 (\theta + au) \right\}$, et en retranchant cette équation de l'équation (1), on aura

$$\begin{aligned} 0 = \delta r \left\{ -a \frac{dds}{dt^2} - 2anr \frac{dv}{dt} \cdot \text{Sin.}^2 \theta - aK \frac{ds}{dt} \right\} \\ + r^2 \delta \theta \left\{ a \frac{ddu}{dt^2} - 2an \frac{dv}{dt} \cdot \text{Sin.} \theta \cdot \text{Cos.} \theta + aK \frac{du}{dt} \right\} \\ + r^2 \delta \omega \cdot \text{Sin.} \theta \left\{ a \frac{ddv}{dt^2} \cdot \text{Sin.} \theta + 2an \frac{du}{dt} \cdot \text{Cos.} \theta - 2an \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\text{Sin.} \theta}{r} + aK \frac{dv}{dt} \cdot \text{Sin.} \theta \right\} \\ - \left(\frac{dQ}{dr} \right) \left\{ \delta r - \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \delta \theta - \left(\frac{dy}{d\omega} \right) \delta \omega \right\}. \end{aligned}$$

Si l'on égale à zéro les coefficients des trois variations δr , $\delta \theta$ et $\delta \omega$, et si l'on observe que $-\left(\frac{dQ}{dr}\right)$ représente la pesanteur que nous désignerons par g (*), on aura, en prenant pour l'unité le rayon r , ce que l'on peut faire ici sans erreur sensible, les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 = a \frac{dds}{dt^2} + 2an \frac{dv}{dt} \cdot \text{Sin.}^2 \theta + aK \frac{ds}{dt} - g; \\ 0 = a \frac{ddu}{dt^2} - 2an \frac{dv}{dt} \cdot \text{Sin.} \theta \cdot \text{Cos.} \theta + aK \frac{du}{dt} - g \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \\ 0 = a \frac{ddv}{dt^2} \cdot \text{Sin.} \theta + 2an \frac{du}{dt} \cdot \text{Cos.} \theta - 2an \frac{ds}{dt} \cdot \text{Sin.} \theta + aK \frac{dv}{dt} \cdot \text{Sin.} \theta - \frac{g}{\text{Sin.} \theta} \left(\frac{dy}{d\omega} \right) \end{aligned}$$

Si l'on prend la seconde décimale, ou la cent millième partie du jour moyen, pour unité de tems, n est le petit angle décrit dans une seconde par la rotation de la terre. Cet angle est extrêmement petit; et comme au et av sont de très-petites quantités par rapport à as , on peut négliger dans la première de ces trois équations, le terme $2an \frac{dv}{dt} \cdot \text{Sin.}^2 \theta$; dans la seconde, le terme $-2an \frac{dv}{dt} \cdot \text{Sin.} \theta \cdot \text{Cos.} \theta$; et dans la troisième,

le terme $2an \frac{du}{dt} \cdot \text{Cos.} \theta$; ce qui réduit ces trois équations aux suivantes :

$$\begin{aligned} 0 = a \frac{dds}{dt^2} + aK \frac{ds}{dt} - g; \\ 0 = a \frac{ddu}{dt^2} + aK \frac{du}{dt} - g \frac{dy}{d\theta}; \\ 0 = a \frac{ddv}{dt^2} \cdot \text{Sin.} \theta - 2an \frac{ds}{dt} \cdot \text{Sin.} \theta + aK \frac{dv}{dt} \cdot \text{Sin.} \theta - \frac{g}{\text{Sin.} \theta} \left(\frac{dy}{d\omega} \right). \end{aligned}$$

K étant une fonction de as et de $a \frac{ds}{dt}$, la première de ces équations donne as en fonction du tems t . Si l'on fait $au = as \left(\frac{dy}{d\theta} \right)$, on satisfera à la seconde de ces équations; parce que g et $\left(\frac{dy}{d\theta} \right)$ peuvent être supposés constans pendant la durée du mou-

(*) Voyez la Mécanique céleste, tom. II, pag. 104. (Note du R.)

vement, vu la petitesse de la hauteur d'où le corps tombe, relativement au rayon terrestre. Cette manière de satisfaire à la seconde équation, est la seule qui convienne à la question présente, dans laquelle u , $\frac{du}{dt}$ sont nuls ainsi que s et $\frac{ds}{dt}$ à l'origine du mouvement. Maintenant, si l'on imagine un fil à plomb de la longueur as , suspendu au point d'où le corps tombe, il s'écartera au midi du rayon r , de la quantité $as \left(\frac{dy}{d\theta}\right)$, et par conséquent de la quantité au ; le corps, en tombant, est donc toujours sur les parallèles des points de la verticale qui sont à la même hauteur que lui : il n'éprouve ainsi aucune déviation vers le midi de cette ligne.

Pour intégrer la troisième équation, nous ferons

$$av \cdot \sin. \theta = \frac{as}{\sin. \theta} \left(\frac{dy}{d\theta}\right) + av';$$

et nous aurons

$$0 = a \frac{ddv'}{dt^2} + aK \frac{dv'}{dt} - 2an \frac{ds}{dt} \cdot \sin. \theta.$$

Le corps s'écartera à l'est du rayon r , de la quantité $av \cdot \sin. \theta$, ou $\frac{as}{\sin. \theta} \left(\frac{dy}{d\theta}\right) + av'$;

mais le fil à plomb s'écartera à l'est de ce rayon, de la quantité $\frac{as}{\sin. \theta} \left(\frac{dy}{d\theta}\right) : av'$ est donc l'écart du corps à l'est de la verticale.

Supposons maintenant la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, en sorte que $K = m \frac{ds}{dt}$; m étant un coefficient qui dépend de la figure du corps et de la densité de l'air, densité variable à raison de l'élévation du corps, mais qui peut être ici supposée constante sans erreur sensible. On aura

$$0 = a \frac{dds}{dt^2} + a^2 m \frac{ds^2}{dt^2} - g.$$

Pour intégrer cette équation, nous ferons

$$as = \frac{1}{m} \cdot \log. s';$$

et nous aurons

$$0 = \frac{dds'}{dt^2} - mgs';$$

ce qui donne en intégrant

$$s' = A \cdot c^{\frac{t}{\sqrt{mg}}} + B \cdot c^{-\frac{t}{\sqrt{mg}}},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et A et B étant deux arbitraires. Pour les déterminer, nous observerons que as doit être nul, lorsque $t = 0$, ce qui donne alors $s' = 1$, et par conséquent

$$A + B = 1;$$

de plus, $\frac{ds}{dt}$ doit être nul avec t , et par conséquent aussi $\frac{ds'}{dt}$; ce qui donne

$$A - B = 0.$$

On a donc $A = B = \frac{1}{2}$, et par conséquent

$$as = \frac{1}{m} \cdot \log. \left\{ \frac{1}{2} c^{\frac{t}{\sqrt{mg}}} + \frac{1}{2} c^{-\frac{t}{\sqrt{mg}}} \right\};$$

et en réduisant en séries

$$s = \frac{gt^2}{2} - \frac{mg^2t^4}{12} + \frac{m^2g^3t^6}{45} - \text{etc.}$$

Pour déterminer $\alpha v'$, nous observerons que l'on a $\alpha \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m} \frac{ds'}{s' dt}$, et qu'ainsi l'équation différentielle en $\alpha v'$, devient

$$0 = \alpha s' \frac{d dv'}{dt^2} + \alpha \frac{ds'}{dt} \frac{dv'}{dt} - \frac{2n}{m} \frac{ds'}{dt};$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\alpha s' \frac{dv'}{dt} = \frac{2n}{m} s' + C,$$

C étant une constante arbitraire. Pour la déterminer, nous observerons que t étant nul, $\frac{dv'}{dt} = 0$, et qu'alors $s' = 1$, ce qui donne $C = -\frac{2n}{m}$; partant

$$\alpha \frac{dv'}{dt} = \frac{2n}{m} \left(1 - \frac{1}{s'}\right) = \frac{2n}{m} \left\{1 - \frac{2}{c \sqrt{mg} + c} - \frac{2}{c \sqrt{mg} - c}\right\}.$$

En intégrant de manière que $\alpha v'$ soit nul avec t, on aura

$$\alpha v' = \frac{2n}{m} t - \frac{4n}{m \sqrt{mg}} \cdot \text{ang. tang.} \left\{ \frac{c \frac{t}{2} \sqrt{mg} - c}{c \frac{t}{2} \sqrt{mg} + c} \right\};$$

et en réduisant en séries, on aura

$$\alpha v' = \frac{ngt^3 \sin. \theta}{3} \left\{1 - \frac{mg^2t^2}{4} + \frac{61}{840} m^2 g^3 t^4 - \text{etc.}\right\}$$

On doit observer dans ces expressions de αs et de $\alpha v'$, que t exprimant un nombre d'unités de tems, g est le double de l'espace que la pesanteur fait décrire dans la première unité de tems; n t est l'angle de rotation de la terre, pendant le nombre t, d'unités, et mg est un nombre dépendant de la résistance que l'air oppose au mouvement du corps.

Pour avoir le tems de la chute, et l'écart vers l'est, en fonction de la hauteur d'où le corps est tombé, nommons h, cette hauteur. On aura par ce qui précède,

$$\frac{mh}{2c} = c \frac{t \sqrt{mg} - t \sqrt{mg}}{+c};$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{1}{\sqrt{mg}} \cdot \log. \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{c^{mh} + 1} + \sqrt{c^{mh} - 1} \right\};$$

et ensuite

$$\alpha v' = \frac{2n}{m \sqrt{mg}} \cdot \left\{ \text{Log.} \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{c^{mh} + 1} + \sqrt{c^{mh} - 1} \right\}^2 - 2 \cdot \text{angl. tang.} \left\{ \frac{\sqrt{c^{mh} - 1}}{\sqrt{c^{mh} + 1}} \right\} \right\}$$

La hauteur h étant donnée, l'observation du tems t donnera la valeur de m, et l'on en conclura $\alpha v'$, ou la déviation du corps vers l'est de la verticale. L'accord de ce résultat avec l'expérience, manifestera le mouvement de rotation de la terre. On pourra encore déterminer m, par la figure et la densité du corps, et par les expériences déjà faites sur la résistance de l'air.

Dans le vide, ou, ce qui revient au même, dans le cas de m infiniment petit, on a

$$v' = \frac{2nh}{3} \cdot \sin. \theta \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$$

θ est à fort peu près le complément de la latitude du lieu; et pour Paris, on peut supposer $\theta = 41^{\circ} 9' 46''$; n est l'angle de rotation de la terre, pendant une unité de tems. Si l'on prend pour cette unité la cent millième partie du jour, on aura $n = \frac{1296000}{99727}$,

parce que la durée de la rotation de la terre, est 0,99727 jour; on a ensuite à Paris

$$\frac{1}{2} g = 3,66107.$$

En supposant donc $h = 54$ mètres, on trouve

$$v' = 5,7337 \text{ millimètres (*)}$$

Additions du Rédacteur.

M. Guglielmini paroît être le premier qui ait éveillé sur ces objets l'attention des astronomes et des géomètres, par des expériences qu'il fit en 1791, et dont le C. Lalande a rendu compte dans le Magasin encyclopédique. En faisant tomber des corps d'une hauteur de 241 pieds, il trouva à l'est de la verticale une déviation de 8 lignes, et une de 5 lignes vers le sud; et ces résultats furent conformes à la théorie qu'il s'étoit faite. Ces expériences ont été répétées l'année dernière à Hambourg, par M. Henzenberg, qui a communiqué ses résultats au C. Laplace.

M. Henzenberg faisant tomber des corps d'une hauteur de 235 pieds de Paris, trouva que leur déviation à l'est, étoit de 4 lignes; et il en observa aussi une au sud, mais de 1¹⁵, 5 seulement. Cette dernière, que la théorie du C. Laplace n'explique pas, tient peut-être à des circonstances météorologiques.

La latitude de Hambourg étant de $53^{\circ} 36'$, on a $\theta = 36^{\circ} 24'$; puis, $h = 235 = 76^m, 337$. Avec ces données, on trouve, par la formule du C. Laplace, en ne tenant pas compte de la résistance de l'air, une déviation à l'est de 8 millimètres, 79, ou environ 3¹⁵, 9 du pied de Paris, résultat qui s'accorde à $\frac{1}{10}$ de ligne avec l'observation de M. Henzenberg.

M. Guglielmini a écrit au C. Lalande, en 1797, qu'il avoit reconnu qu'il ne devoit point y avoir de déviation au sud; et il a fait en conséquence de nouvelles expériences, mais dont les résultats ne nous sont pas parvenus. L. C.

C H I M I E.

Extrait d'un mémoire du C. GUYTON-MORVEAU, ayant pour titre : Examen d'un carbonate de magnésie natif.

Quoique la magnésie fasse partie constituante d'un assez grand nombre de pierres, elle n'y est cependant qu'en petite quantité, à quelques exceptions près; mais le carbonate de magnésie natif se rencontre encore plus rarement dans des proportions un peu considérables. Le C. Guyton, en cherchant une argille qui eût au plus haut degré la propriété hygrométrique, vient de trouver, dans une pierre des environs de Castellamonté, qui passe dans ce pays pour une argille très-riche en alumine, une quantité très-grande de carbonate de magnésie natif. INSTITUT NAT.

(*) Pour effectuer ce calcul, il faut observer que le numérateur de n est la circonférence du cercle, exprimée en secondes sexagésimales, et doit être convertie en parties du rayon, en la divisant par l'arc égal au rayon, arc dont le logarithme est 5,3144251.

Le C. Laplace n'a pas tenu compte ici de la résistance de l'air, parce que son influence sur les balles de plomb d'un petit diamètre, avec lesquelles on fait les expériences, est très-petite. (Note du R.)